Faces em zona e Teorema de Cauchy[1]

EDUARDO A. SALGADO[2]

1 — Entregou para publicação em 30-3-66; 2 — Cadeira de Geologia da ESALQ.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar a aplicação do teorema de Cauchy, sôbre produto de dois determinantes, às matrizes quadradas de ordem 3, representando zonas cristalograficas.

INTRODUÇÃO

É conhecido, em algebra, o seguinte teorema de Cauchy: o determinante-produto de dois outros é igual ao produto desses determinantes.

Êste determinante-produto pode ser obtido de quatro maneiras diferentes, a saber: fazendo a multiplicação linha por coluna, coluna por coluna, linha por linha e coluna por linha.

Por outro lado sabe-se, em cristalografia, que o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é igual a zero, uma vez que os números de cada linha formem, em conjunto, o símbolo de Miller de cada uma de três faces pertencentes a determinada zona cristalografica.

Êste trabalho tem por finalidade evindenciar certas relações interessantes que se obtem, quando se aplica o teorema de Cauchy a matrizes quadradas que representam zonas cristalograficas.

DEDUÇÃO

Designaremos por (I) e (II) as zonas primeira e segunda que tomam parte na multiplicação e a zona-produto será designada por (III).

Linha por coluna

$$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & 1 \\ h_2 & k_2 & 1 \\ h_3 & k_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & 1 \\ C & D & 1 \\ E & F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (Ah_1+Ck_1+E) & : (Bh_1+Dk_1+F) & : (h_1+k_1+1) \\ (Ah_2+Ck_2+E) & : (Bh_2+Dk_2+F) & : (h_2+k_2+1) \\ (Ah_3+Ck_3+E) & : (Bh_3+Dk_3+F) & : (h_3+k_3+1) \end{vmatrix}$$

Determine-se o símbolo da zona (II), por meio das faces (AB1) e (CD1). Obtem-se:

$[r_1 : r_2 : r_3] = [(B-D) : (C-A) : (AD-BC)]$. Vamos provar que as zonas (III) e (II) coincidem. Deve-se ter então:

$$(B-D)(Ah_1+Ck_1+E) + (C-A)(Bh_1+Dk_1+F) + (AD-BC)(h_1+k_1+1) = 0$$

$$(B-D)(Ah_2+Ck_2+E) + (C-A)(Bh_2+Dk_2+F) + (AD-BC)(h_2+k_2+1) = 0$$

Estas duas expressões, desenvolvidas e simplificadas dão:

$$E(B-D) + F(C-A) + AD-BC = 0, \text{ o que é exato.}$$

Coluna por coluna

$$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & 1 \\ h_2 & k_2 & 1 \\ h_3 & k_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & 1 \\ C & D & 1 \\ E & F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (Ah_1+Ch_2+Eh_3) & : & (Bh_1+Dh_2+Fh_3) & : & (h_1+h_2+h_3) \\ (Ak_1+Ck_2+Ek_3) & : & (Bk_1+Dk_2+Fk_3) & : & (k_1+k_2+k_3) \\ (A+C+E) & : & (B+D+F) & : & (1+1+1) \end{vmatrix}$$

Vamos verificar que, desta vez ainda, a zona (III) coincide com a zona (II). Devemos ter, assim:

$$(B-D)(Ah_1+Ch_2+Eh_3) + (C-A)(Bh_1+Dh_2+Fh_3) + (AD-BC)(h_1+h_2+h_3) = 0$$

$$(B-D)(A+C+E) + (C-A)(B+D+F) + 3(AD-BC) = 0$$

Desdobrando e simplificando obtem-se, respetivamente:

$$h_3(AD+BE+CF-DE-AF-BC) = 0, \quad AD+BE+CF-DE-AF-BC = 0$$

A expressão anterior, entre parênteses, é igual a zero, pois representa o determinante da matriz (II).

Linha por linha

$$\begin{vmatrix} h_1k_1 & 1 \\ h_2k_2 & 1 \\ h_3k_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & 1 \\ C & D & 1 \\ E & F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (Ah_1+Bk_1+1): & (Ch_1+Dk_1+1): & (Eh_1+Fk_1+1) & \ldots.(1) \\ (Ah_2+Bk_2+1): & (Ch_2+Dk_2+1): & (Eh_2+Fk_2+1) & \ldots.(2) \\ (Ah_3+Bk_3+1): & (Ch_3+Dk_3+1): & (Eh_3+Fk_3+1) & \ldots.(3) \end{vmatrix}$$

Coluna por linha

$$\begin{vmatrix} h_1k_1 & 1 \\ h_2k_2 & 1 \\ h_3k_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & 1 \\ C & D & 1 \\ E & F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (Ah_1+Bh_2+h_3): & (Ch_1+Dh_2+h_3): & (Eh_1+Fh_2+h_3) & ..(1) \\ (Ak_1+Bk_2+k_3): & (Ck_1+Dk_2+k_3): & (Ek_1+Fk_2+k_3) & ..(2) \\ (A+B+1): & (C+D+1): & (E+F+1) & ..(3) \end{vmatrix}$$

Vamos mostrar que a zona (III), obtida em "coluna por linha", é a mesma que se obtem em "linha por linha".

O símbolo da zona (III), $[R_1R_2R_3]$, tirado das faces (1) e (3), em "coluna por linha", é constituído dos índices:

$$R_1 = \left\{(E+F+1)(Ch_1+Dh_2+h_3) - (C+D+1)(Eh_1+Fh_2+h_3)\right\}$$

$$R_2 = \left\{(A+B+1)(Eh_1+Fh_2+h_3) - (E+F+1)(Ah_1+Bh_2+h_3)\right\}$$

$$R_3 = \left\{(C+D+1)(Ah_1+Bh_2+h_3) - (A+B+1)(Ch_1+Dh_2+h_3)\right\}$$

Procuremos verificar se a primeira face da zona-produto de "linha por linha" pode pertencer à zona (III) de "coluna por linha".

Devemos ter, nesse caso:

$$R_1\ (Ah_1+Bk_1+1) + R_2\ (Ch_1+Dk_1+1) + R_3\ (Eh_1+Fk_1+1) = 0.$$

Substituindo, nesta expressão, os valores anteriormente achados de R_1, R_2, R_3, obtem-se, no primeiro membro, 108 termos que, após simplificação, ficam reduzidos a 36, dando como resultado final:

$$(AD+BE+CF-DE-AF-BC)\ (h_1h_2+h_3k_1+h_1-h_1h_3-h_1k_1-h_2) = 0,$$

o que é exato, uma vez que a primeira expressão do primeiro membro, entre parênteses, vale zero, como determinante da matriz (II).

Resultado semelhante é obtido quando se utiliza a terceira face da zona-produto de "linha por linha".

Os valores de R_1, R_2, R_3, podem ser assim escritos:

$$R_1 = (h_2-h_1)\ (DE-CF) + (h_3-h_1)(E-C) + (h_3-h_2)(F-D)$$

$$R_2 = (h_2-h_1)\ (AF-BE) + (h_3-h_1)(A-E) + (h_3-h_2)(B-F)$$

$$R_3 = (h_2-h_1)\ (BC-AD) + (h_3-h_1)(C-A) + (h_3-h_2)(D-B)$$

Somando, membro a membro, estas três expressões, obtem-se:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0.$$

Relativamente às zonas (I) e (II) podem ocorrer os seguintes casos:

a) em ambas, os índices do eixo de zona não somam zero (caso geral). Seja $\dfrac{R_2}{R_1} = \delta$ e procuremos obter δ, em função dos índices das zonas (I) e (II).

No símbolo da zona (III) tem-se, então:
$R_1 = R_1$, $R_2 = \delta R_1$, $R_3 = -R_1(1+\delta)$. Basta tomar, pois, o símbolo de qualquer face da zona (III) e levar em conta os valores anteriores de R_1, R_2, R_3, para que se obtenha δ.

Tome-se, por exemplo, a face-produto (1) de "coluna por linha".

Tem-se:

$$R_1(Ah_1+Bh_2+h_3) + \delta\, R_1(Ch_1+Dh_2+h_3) - \\ -R_1(Eh_1+Fh_2+h_3) - \delta\, R_1(Eh_1+Fh_2+h_3) = 0 \; .\cdot.$$

$$.\cdot.\; \delta = \frac{h_1(E-A) + h_2(F-B)}{h_1(C-E) + h_2(D-F)} .$$

b) na zona (I), de símbolo $[r_1 : r_2 : r_3]$, os índices somam zero, tendo-se $\dfrac{r_2}{r_1} = q$. Procuremos relacionar q e δ.

A face-produto (1) de "linha por linha" dá:

$$R_1(Ah_1+Bk_1+1) + R_2(Ch_1+Dk_1+1) + R_3(Eh_1+Fk_1+1) = 0 \ldots (1)$$

A face-produto (3) de "coluna por linha" dá:

$$R_1(A+B+1) + R_2(C+D+1) + R_3(E+F+1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Subtraíndo, membro a membro, (2) de (1), vem:

$$R_1[A(h_1-1) + B(k_1-1)] + R_2[C(h_1-1) + D(k_1-1)] + R_3[E(h_1-1) \\ + F(k_1-1)] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

De $r_1+r_2+r_3 = 0$ tira-se $r_3 = -r_1-r_2$ e, para a face $(h_1k_1\,1)$ podemos escrever $h_1r_1 + k_1r_2 - r_1 - r_2 = 0 \; .\cdot.\; r_1 : r_2 = $
$= (1-k_1) : (h_1-1) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

Confrontando (4) e (3) obtem-se:

$$R_1 (Ar_2—Br_1) + R_2 (Cr_2—Dr_1) + R_3 (Er_2—Fr_1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Substituindo, em (5), R_3 por $(—R_1—R_2)$, r_2 por $\alpha\, r_1$, R_2 por $\delta\, R_1$ dividindo por $R_1 r_1$, tem-se:

$$A\alpha—B—E\alpha+F+\delta(C\alpha—D—E\alpha+F) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

expressão esta que liga α e δ, através dos índices da segunda zona.

Vamos verificar em que condições a zona (I) pode coincidir com a zona (III). Neste caso, $\alpha=\delta$ e a expressão (6) transforma-se em:

$$\alpha^2(C—E) + \alpha(A—E—D+F) + F—B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Tomada uma zona (II) qualquer, tira-se de (7) o valor de α para a zona (I) e, após multiplicação de "linha por por linha" e "coluna por linha", obtem-se uma zona-produto que coincide então com a zona (I).

O valor $\alpha=\delta$ pode ainda ser obtido em função apenas dos índices da primeira coluna da matriz (II).

Com efeito, valendo-nos da face (3) de "coluna por linha" e levando em conta que o eixo da zona (III) tem por símbolo $[1:\alpha:\overline{1+\alpha}]$, podemos escrever:

$$A+B+1 + \alpha(C+D+1)—E—F—1—\alpha(E+F+1) = 0 \therefore$$

$$\therefore \alpha(C+D—E—F) + A+B—E—F = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Somando (7) e (8), membro a membro, obtem-se:

$$\alpha^2(C—E)+\alpha(A+C—2E)+A—E = 0 \ldots\ldots (9),$$ da qual

se tira $\alpha = \dfrac{E — A}{C — E}$

c) seja a zona (I) qualquer e $[r'_1:r'_2:r'_3]$ o símbolo da zona (II), no qual $r'_1+r'_2+r'_3 = 0$, sendo $\frac{r'_2}{r'_1} = \beta$ e procuremos relacionar β e δ, através de índices da zona (II).

Temos, para a face (AB1):

$Ar'_1+Br'_2+r'_3 = 0 \therefore Ar'_1+Br'_2-r'_1-r'_2 = 0 \therefore$

$\therefore \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{A-1}{1-B} = \frac{C-1}{1-D} = \frac{E-1}{1-F} = \beta$ .....(10), tirando-se daqui:

$A=\beta(1-B)+1,\ C=\beta(1-D)+1,\ E=\beta(1-F)+1$ ....(11)

Na expressão (2), substituindo A, C, F, pelos valores de (11), R_2 por δR_1 e R_3 por $(-R_1-R_2)$, obtem-se:

$B-\beta B-F+\beta F+\delta(D-\beta D-F+\beta F) = 0$ ....(12)

Querendo-se $\beta = \delta$, (12) transforma-se em:

$\delta^2(F-D)+\delta(D-B)+B-F = 0$ ....(13)

Tomando-se, em (13), um valor desejado para $\delta = \beta$ e valores arbitrários para B e D, obtem-se F e completa-se a zona (II) com A, C, E.

A multiplicação de "linha por linha" e "coluna por coluna", sendo qualquer a zona (I), produz então a zona (III), coìncidindo com a zona (II).

d) nas zonas (I) e (II), os índices do eixo de zona somam zero, tendo-se $\alpha \neq \beta \neq \delta$.

As expressões (6) e (12) permitem relacionar α, β, δ.

e) querendo-se, agora, que as zonas (I), (II) e (III) coincidam, temos: $\frac{A-1}{1-B} = \frac{C-1}{1-D} = \frac{E-1}{1-F} = \alpha$ ....(14, ver expressão 10)

Tirando-se de (14) A, C, E e levando-os em (7) obtem-se:

$$\alpha = \frac{B - F}{F - D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Fixando um valor para α e tomando-se valores arbitrários, na zona (II), para D e F, obtem-se A, B, C, E, completando assim a referida zona (II).

Escrevendo-se, agora, uma zona (I), cujo eixo seja o mesmo da zona (II), o produto de "linha por linha" e "coluna por linha" leva a uma zona (III), coincidente com (I) e (II).

SUMMARY

The present work has the objective of studying the application of the theorem of Cauchy about the product of two determinants to the square matrices of order 3 representing crystallographical zones.

BIBLIOGRAFIA CITADA

F. A. LACAZ NETO — 1943 — Teoria elementar dos determinantes.